

实验8 矩阵特征值计算

计52 路橙 2015010137

实验要求

实验题目

用幂法求出下列矩阵按模最大的特征值 λ_1 以及其对应的特征向量 x_1 ，使得

$$|(\lambda_1)_{k+1} - (\lambda_1)_k| < 10^{-5}$$

1.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

2.

$$B = \begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

初始数据

如上所示的两个矩阵 A 和 B 。

算法描述

由于幂法在 $|\lambda_1| > 1$ 时存在上溢问题，而在 $|\lambda_1| < 1$ 时存在下溢问题，并且当 $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| \approx 1$ 时收敛速度慢，因此本次实验中我选择了采用向量规格化步骤的幂法。

具体而言，设 $A \in R^{n \times n}$ 有 n 个线性无关的特征向量，主特征值 λ_1 满足： $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ ，则对于任何非零初始向量 $v_0 = u_0 (\alpha_1 \neq 0)$ ，按下述方法构造的向量序列 $\{u_k\}, \{v_k\}$ ：

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \neq 0 \\ v_k = Au_{k-1} \\ (v_k) = \max(v_k) \\ u_k = \frac{v_k}{(v_k)} \end{cases}$$

则：

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \frac{x_1}{\max(x_1)} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (v_k) = \lambda_1 \end{cases}$$

程序清单说明

1.cpp是所有的代码，其中：

- matrixMult是矩阵乘法的计算
- getMaxItem用来计算 (v_k)
- get_lambda用来计算特征值和特征向量。

运行结果与分析

对于两种向量，我都选取了各个分量为1的向量作为初始值。即，对于A选择 $v_0 = (1, 1, 1)^T$ ，对于B选择 $v_0 = (1, 1, 1, 1)^T$ 。

运行结果

A结果：

λ_1 : 12.25432058

特征向量 x_1 : (0.55973554, -0.83044375, 0.73872925)

共迭代了15次。

B结果：

λ_1 : 98.52169772

特征向量 x_1 : (-0.60397234, 1.00000000, -0.25113513, 0.14895345)

共迭代了5次。

分析

由于我采用了向量规格化的方法，因此算法没有溢出的现象，精确度较高。

此外，算法的收敛速度还和初始值的选取有关。

具体而言，当初始值选择得与特征向量较为接近时，收敛速度很快；而当初始值选择与特征向量差别较大时，收敛速度较慢。

体会与展望

本次实验我实现了向量规格化步骤的幂法，与普通的幂法相比，这种算法能克服幂法溢出的缺点，计算的精确度也较高。此外，我选择了不同的初始值作为 v_0 ，发现算法的收敛速度与初始值密切相关。